2026 年全国硕士研究生招生考试 真题及参考答案完整版

《数学》（一）【科目代码：301】

一、选择题:1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$（a 是非 0 常数)确定,则(　　)

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$　　(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$

(C) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$　　(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$

【答案】(A)

【解析】可利用多元隐函数求导公式求偏导，令 $F(x,y,z)=e^{y+az}+az-x$，则 $F_x'=-1$，$F_y'=e^{y+az}$，

$F_z'=a(1+e^{y+az})$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}-(-\dfrac{F_y'}{F_z'})=\dfrac{1}{a}$，故选(A).

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3+(-1)^n}{4})^n x^{2n}$ 的收敛域是（　　）

(A) $[-2,2]$　　(B) $[-1,1]$

(C) $(-2,2)$　　(D) $(-1,1)$

【答案】(D)

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^{2n-1}}{4}\right)^{2n-1}x^{4n-2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^{2n}}{4}\right)^{2n}x^{4n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}x^{4n-2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}x^{4n-2}$ 的收敛半径为 $\sqrt{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}$ 的收敛半径为 1，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 的收敛半径为 1，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^{2n-1}}{4}\right)^{2n-1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^{2n}}{4}\right)^{2n}=1$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^n}{4}\right)^n$ 不存在，则当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^n}{4}\right)^n$ 发散，所以收敛域为 $(-1,1)$，

故选(D).

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义,则（　　）

(A) 当 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,在 $(0,1)$ 单调递增时，$f(0)$ 是极小值

(B) 当 $f(0)$ 是极小值时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,在 $(0,1)$ 单调递增

(C) 当 $f(x)$ 的图形在 $\left[-1,1\right]$ 是凹的时，$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $\left[-1,1\right)$ 单调递增

(D) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $\left[-1,1\right)$ 单调递增时，$f(x)$ 的图形在 $\left[-1,1\right]$ 是凹的

【答案】(C)

【解析】对于(A)选项，极值的第一判别法要求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故(A)错;

对于(B)选项，考虑函数 $f(x)=-\cos 10x$，该函数在 $x=0$ 处取到极小值，但是在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 都不是单调函数．故(B)错;

对于(D)选项，考虑函数 $f(x)=x^3+x^2-2x$，那么 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=x^2+2x$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，但是 $f''(x)=6x+2$ 在 $x=-\dfrac{1}{3}$ 两边异号，所以$f(x)$的凹凸性改变，故(D)错;

对于(C)选项，设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上凹，要证 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，即证对于任意的 $x_1<x_2$,有 $\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}<\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$.

根据凹函数的定义：对于任意的 $x,y\in[-1,1],x\neq y,\lambda\in(0,1)$，都有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

令 $\lambda=\dfrac{x_2-x_1}{1-x_1}$，$x=1$，$y=x_1$，那么

$$f(x_2)=f(\lambda+(1-\lambda)x_1)<\lambda f(1)+(1-\lambda)f(x_1)$$

从而

$$f(x_2)-f(1)<(1-\lambda)[f(x_1)-f(1)]$$

代入 λ 的表达式，得 $\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}<\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$．故(C)正确.

4. 已知有界区域 Ω 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成,函数 $f(u)$ 连续,

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=(\quad)$

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)rdz$

(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} dr\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)rdz$

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

【答案】(C)

【解析】根据三重积分化球坐标系下累次积分原理，可得：

$\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$ ，故选(C).

5. 单位矩阵经过若干次互换两行得到的矩阵为置换矩阵,设 A 为 n 阶置换矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则(　　)

(A) A^* 为置换矩阵　　(B) A^{-1} 为置换矩阵

(C) $A^{-1}=A^*$　　(D) $A^{-1}=-A^*$

【答案】(B)

【解析】由题设知 $A=P_1\cdot P_2\cdots P_S$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 均为初等矩阵，
则 $A^{-1}=(P_1\cdot P_2\cdots P_s)^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}\cdot P_1^{-1}=P_s\cdots P_2\cdot P_1$ 也为置换矩阵，故选(B).

6. 设 A，B 为 n 阶矩阵，β 是 n 维列向量，若 A 的列向量组可由 B 的列向量组表示，则(　　)

(A) 当 $Ax=\beta$ 有解时，$Bx=\beta$ 有解

(B) 当 $A^Tx=\beta$ 有解时，$B^Tx=\beta$ 有解

(C) 当 $Bx=\beta$ 有解时，$Ax=\beta$ 有解

(D) 当 $B^Tx=\beta$ 有解时，$A^Tx=\beta$ 有解

【答案】(A)

【解析】由题设知存在矩阵 C 使得 $A=BC$，若 $Ax=\beta$ 有解，则 $BCx=\beta$ 有解，令 $X=Cx$，则 $BX=\beta$ 有解，故选(A).

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.若方程 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示的曲面为圆柱面，则(　　)

(A) $a=-4$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

(B) $a=-4$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换下的标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$

(C) $a=2$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $a=2$，且 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换下的标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$

【答案】(B)

【解析】由 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示圆柱面，故二次型矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_3=0$，

故$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=0$，则$a=2$或$-4$，又由$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3a<0$，故$a=-4$，

此时$A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$，由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+4 \end{vmatrix}=0$，

得A的特征值为$\lambda_1=-6,\lambda_2=-6,\lambda_3=0$，故$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换下的标准形为$-6y_1^2-6y_2^2$.

故选(B).

8. 设随机变量$X\sim N(1,2)$，令$f(t)=E\left[(X+t)^2\right]$，则$f(t)$的最小值点和最小值分别为(　　)

(A) $1,2$　　(B) $1,4$

(C) $-1,2$　　(D) $-1,4$

【答案】(C)

【解析】 $f(t)=E[(X+t)^2]=D(X+t)+[E(X+t)]^2=DX+(EX+t)^2=2+(1+t)^2$,

所以当$t=-1$时，$f(t)$的最小值为2.故选(D).

9. 设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，随机变量Y的分布函数为$F(ay+b)$，X的数学期望为μ，方差为$\sigma^2(\sigma>0)$，若Y的数学期望和方差分别为0和1，则（　　）

(A) $a=\sigma$，$b=\mu$　　(B) $a=\sigma$，$b=-\mu$

(C) $a=\dfrac{1}{\sigma}$，$b=\mu$　　(D) $a=\dfrac{1}{\sigma}$，$b=-\mu$

【答案】(A)

【解析】 由题可知，$a>0$，$Y=\dfrac{1}{a}X-\dfrac{b}{a}$，所以

$E(Y)=E\left(\dfrac{1}{a}X-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{1}{a}E(X)-\dfrac{b}{a}=\dfrac{\mu}{a}-\dfrac{b}{a}=0$, $D(Y)=D\left(\dfrac{1}{a}X-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{1}{a^2}D(X)=\dfrac{\sigma^2}{a^2}=1$,所以

$a=\sigma$，$b=\mu$.

故选(A).

10. 设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^k}$（$k=1,2,\dots$），则对于正整数$m$，$n$，有(　　)

(A) $P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>m\}$

(B) $P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>n\}$

(C) $P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>m\}$

(D) $P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>n\}$

【答案】(D)

【解析】$P\{X>m+n|X>m\}=\dfrac{P\{X>m+n\}}{P\{X>m\}}$，

所以 $P\{X>m+n\}=\sum\limits_{k=m+n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^k}\right)=\dfrac{1}{2^{m+n+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{m+n}}$，

$P\{X>m\}=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^k}\right)=\dfrac{1}{2^{m+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{m}}$，

$P\{X>n\}=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^k}\right)=\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{n}}$，

故 $P\{X>m+n\}-P\{X>m\}P\{X>n\}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2^{n+m}}+\dfrac{1}{3^{n+m}}-\dfrac{1}{2^n\cdot 3^m}-\dfrac{1}{3^n\cdot 2^m}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(\dfrac{1}{3^m}-\dfrac{1}{2^m}\right)\right]>0$，

所以 $P\{X>m+n\}-P\{X>m\}P\{X>n\}>0$，

故选(D).

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 设向量 $\overline{v_1}=(0,x,z)$，$\overline{v_2}=(y,0,1)$，令 $\overline{F}(x,y,z)=\overline{v_1}\times\overline{v_2}$，则 $\operatorname{div}\overline{F}=$____________.

【答案】$1+z$

【解析】$\vec{F}(x,y,z)=\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & x & z\\ y & 0 & 1\end{vmatrix}=(x,yz,-xy)$，则 $div\vec{F}=1+z$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x})=$________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+o(x^2)\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

13. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=t+\cos t\end{cases}$ $(t\in(0,\frac{\pi}{2}))$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________.

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

【解析】 由参数方程可得：$x'(t)=4\sin t\cos t=2\sin 2t$，$y'(t)=1-\sin t$，

则 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-\sin t}{2\sin 2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx\big/dt}=\frac{d\left(\frac{1-\sin t}{2\sin 2t}\right)\Big/dt}{x'(t)}=\frac{-\cos t\cdot 2\sin 2t-(1-\sin t)\cdot 4\cos 2t}{8\sin^3 2t},$$

故 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

14. 设 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x=$________.

【答案】 $2\ln 2$

【解析】 $\int\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=\int\ln(1+x)d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln(1+x)+\int\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1+x)+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=-\frac{1}{x}\ln(1+x)+\ln\frac{x}{x+1},$$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\ln(1+x)+\ln\frac{x}{x+1}\right)\Big|_1^{+\infty}=2\ln 2$.

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&2&1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$, 记 $m(X)$ 为3阶矩阵 X 的实特征值中的最大值,若

$m(A)<m(B)$,则 a 的取值范围为____________.

【答案】 $a<0$

【解析】 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-a & -2\\ 0 & -2 & \lambda-a\end{vmatrix}=0$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=a+2,\lambda_3=a-2$，

同理 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=0$，得 B 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-1$，

又 $m(A)<m(B)$，则 $a+2<2$，故 $a<0$.

16. 设随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，随机变量 Y 服从参数为3的泊松分布，X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$____________.

【答案】 4

【解析】 $E(X)=1,E(Y)=3,D(X)=1$. $XY=X(Y-X)+X^2$,

$$E(XY)=E\left[X(Y-X)+X^2\right]=E\left[X(Y-X)\right]+E(X^2)=E(X)E(Y-X)+E(X^2)$$

$$=E(X)\left[E(Y)-E(X)\right]+D(X)+E^2(X)=4.$$

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

求 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$ 的极值.

【解析】 首先求驻点.

由 $\begin{cases} f'_x=(2x^2+4x-y^2)e^x=0\\ f'_x=-2ye^x=0\end{cases}$，解得驻点 $(0,0),(-2,0)$.

接下来判定是否是极值点.

由 $\begin{cases} f''_{xx}=(4x+4)e^x+(2x^2+4x-y^2)e^x\\ f''_{xy}=-2ye^x\\ f''_{yy}=-2e^x\end{cases}$，

得在点 $(0,0)$ 处 $A=4,B=0,C=-2$， $AC-B^2<0$，非极值点;

在点 $(-2,0)$ 处 $A=-4e^{-2},B=0,C=-2e^{-2}$， $AC-B^2>0,A<0$ 是极大值点.

故 $f(-2,0)=8e^{-2}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值.

18. (本题满分 12 分)

设 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有 3 阶连续导数，且存在可微函数 $F(x,y)$ 使

$$dF(x,y)=\frac{f(xy)}{x^2y}dx+\frac{f''(xy)}{xy^2}dy(xy>0).$$

(1) 证明：$\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}=c$，$c$ 为常数；

(2) 设 $f(1)=1$，$f'(1)=-1$，$f''(1)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】(1) 由条件得 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{f(xy)}{x^2y},\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{f''(xy)}{xy^2}$，又由 $f'''(u)$ 连续，得 $\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x}$ 均连续，

从而二阶偏导数相等，即 $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{f'(xy)x\cdot y-f(xy)\cdot 1}{y^2}=\dfrac{1}{y^2}\dfrac{f'''(xy)y\cdot x-f''(xy)\cdot 1}{x^2}$，

令 $u=xy$，得 $\dfrac{f'(u)u-f(u)}{u^2}=\dfrac{f'''(u)u-f''(u)}{u^2}$，

移项得 $\left(\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}\right)'=0$，从而 $\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}=C$，其中 C 为常数.

(2) 代入 $f(1)=1,f''(1)=0$ 得 $c=-1$，从而 $f''(u)-f(u)=-u$，

解得 $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}+u$，

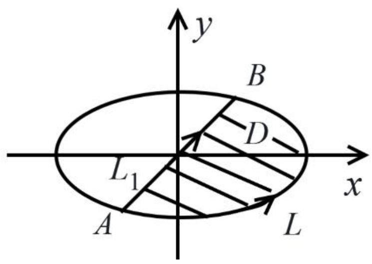
代入 $f(1)=1,f'(1)=-1$，得 $C_1=-e^{-1},C_2=e$，故 $f(u)=-e^{u-1}+e^{1-u}+u$.

19. (本题满分 12 分)

设有向曲线 L 为椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上沿逆时针方向从点 $A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 到点 $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的部分，计算曲线积分 $I=\int_L(e^{x^2}\sin x-2xy)dx+(6x-x^2-y\cos^4y)dy$.

【解析】利用格林公式：$P=e^{x^2}\sin x-2xy,Q=6x-x^2-y\cos^4y$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=6-2x,\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2x$，



取 $L_1:y=x$(x 从 $-\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2}$)，

$$I=\int_{L+L_1^-}Pdx+Qdy+\int_{L_1}Pdx+Qdy$$

$$=\iint_D 6dxdy+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(e^{x^2}\sin x-2x^2+6x-x^2-x\cos^4 x\right)dx$$

$$=6\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\pi-\frac{1}{4}.$$

20. (本题满分 12 分)

设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$，记 $a=\int_0^1 f(x)dx$.

(1) 证明 $a>0$;

(2) 令 $F(x)=a(1-x^2)+\int_1^x f(t)dt$，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $F''(\xi)=0$.

【解析】(1) $\because \int_{-1}^{1} f(x)dx=0\Rightarrow\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=0, \because \int_0^1 f(x)dx=a\Rightarrow\int_{-1}^{0} f(x)dx=-a$，

$\because \int_{-1}^{0} f(x)dx=-a$，令 $t=-x\Rightarrow\int_1^0 f(-t)d(-t)=\int_0^1 f(-x)dx=-a\Rightarrow-\int_0^1 f(-x)dx=a$，

$\therefore 2a=\int_0^1 f(x)dx+\left[-\int_0^1 f(-x)dx\right]=\int_0^1 f(x)-f(-x)dx$.

$\because f(x)$ 单调增加，$\therefore \forall x\in(0,1], f(x)>f(-x)\therefore \int_0^1 f(x)-f(-x)dx>0\Rightarrow 2a>0\Rightarrow a>0$，

(2)证明：令 $F(x)=a(1-x^2)+\int_1^x f(t)dt\Rightarrow F(-1)=0, F(1)=0$，

$F(0)=a+\int_1^0 f(t)dt=a-a=0$，

$F(x)$ 在 $[-1,0],[0,1]$，分别利用罗尔定理，$\exists\xi_1\in(-1,0)$，$\xi_2\in(0,1)$，有 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

$F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 再次利用罗尔定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$，使得 $F''(\xi)=0$.

21. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$G=(\alpha_1,\alpha_2)$

(1) 证明：α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

(2) 求矩阵 H 使得 $A=GH$，并求 A^{10}.

【解析】(1) 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故 $r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，故极大线性无关组中有 2 个向量，又由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均可由 α_1,α_2 线性表示，故 α_1,α_2 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组.

(2) 由(1)知 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$，故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$

故 $H=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，由于 $A=GH$，故 $A^{10}=GH\cdot GH\cdot GH\cdot\cdots GH=G(HG)^9H$，

由 $HG=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，故 $(HG)^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$，

则 $A^{10}=G(HG)^9H=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}$.

22. (本题满分 12 分)

假设某种元件寿命服从指数分布,其均值 θ 是未知参数,为估计 θ,取 n 个这种元件同时做寿命实验，试验直到出现 $k(1\le k\le n)$ 个元件失效时停止.

(1) 若 $k=1$,失效元件寿命记为 T,(i)求 T 的概率密度；(ii)确定 a,使 $\hat{\theta}=aT$ 是 θ 的无偏估计,并求 $D(\hat{\theta})$；

(2) 已知 k 个失效元件寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$,且 $t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$,似然函数为

$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求 θ 的最大似然估计值.

【解析】(1)(i) X 为元件的寿命，分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0\end{cases}$，

概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$. $T=\min\{X_1,X_2,\cdots X_n\}$.

$F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots X_n\}>t\}$

$=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}\cdots P\{X_n>t\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{n} P\{X_i>t\}=1-[1-F(t)]^n=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-\frac{nt}{\theta}}, & t\geq 0\end{cases}.$$

故 $f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nt}{\theta}}, t>0\\ 0 \qquad ,\text{其他}\end{cases}.$

(ii) $T\sim E(\dfrac{n}{\theta})$，$E(\hat{\theta})=E(aT)=aE(T)=a\dfrac{\theta}{n}=\theta$，得

$a=n$．$D(\hat{\theta})=D(aT)=a^2D(T)=a^2\left(\dfrac{\theta}{n}\right)^2=\theta^2$.

(2) $\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$，$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{-k}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$.