2026 年全国硕士研究生招生考试 真题及参考答案完整版

《数学》（三）【科目代码：303】

一、选择题:1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1. 曲线 $y = xe^{\frac{1}{x}}$ (　　)

(A) 无水平渐近线，无铅直渐近线　　(B) 有水平渐近线，有铅直渐近线

(C) 无水平渐近线，有铅直渐近线　　(D) 有水平渐近线，无铅直渐近线

【答案】(C)

【解析】因 $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty$，则曲线 $y = xe^{\frac{1}{x}}$ 无水平渐近线，曲线在 $x=0$ 无定义，$\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$，则 $x=0$ 为铅直渐近线，故选(C).

2. 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $x - az = e^{y+az}$ (a 是非零常数)确定，则(　　)

(A) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$　　(B) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

(C) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$　　(D) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

【答案】(A)

【解析】可利用多元隐函数求导公式求偏导，令 $F(x,y,z) = e^{y+az} + az - x$，则 $F_x' = -1$，$F_y' = e^{y+az}$，$F_z' = a(1+e^{y+az})$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x'}{F_z'} - (-\frac{F_y'}{F_z'}) = \frac{1}{a}$，故选(A).

3. 已知函数 $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{e^t}{1+t^2} dt$，$f$ 的反函数为 g，则(　　)

(A) $g(0)=1, g'(0) = \frac{3}{2}e$　　(B) $g(0)=1, g'(0) = \frac{2}{3e}$

(C) $g(1)=1, g'(1) = \frac{3}{2}e$　　(D) $g(1)=1, g'(1) = \frac{2}{3e}$

【答案】(B)

【解析】因 $f(x)$ 的反函数为 $g(y)$，所以由 $f(1)=0$ 可得 $g(0)=1$，又 $f'(x) = \frac{e^{x^3}}{1+x^6}\cdot 3x^2$，所以 $f'(1) = \frac{3e}{2}$，从而 $g'(0) = \frac{2}{3e}$，故选(B).

4. 设 t 时刻某证券的交易单价为 $p(t)$，某机构持有该证券的份额为 $q(t)$，若该机构在 $[0,T]$ 持续购

入一定份额该证券，则这些证券的平均购入价格为(　　)

(A) $\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$　　(B) $\frac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)dt$

(C) $\frac{1}{T}\int_0^T p(t)q'(t)dt$　　(D) $\frac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)q'(t)dt$

【答案】(D)

【解析】由t时刻的交易单价是$p(t)$，持证券的份额$q(t)$，所以$t\to dt$时，总购入价格为

$\int_0^T p(t)dq(t)=\int_0^T p(t)q'(t)dt$，故选(D).

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\1&1\\a&b\end{pmatrix}$.若存在矩阵$B$满足$AB=C$，则(　　)

(A) $a=-1$，$b=-1$　　(B) $a=2$，$b=2$

(C) $a=-1$，$b=2$　　(D) $a=2$，$b=-1$

【答案】(A)

【解析】

$$(A,C)=\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\1&1&3&1&1\\1&1&1&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&-2&a-1&b-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&a+1&b+1\end{pmatrix},$$

由于$r(A,C)=r(A)$，故$a+1=0,b+1=0$，故$a=-1,b=-1$.

6. 设A为3阶非零矩阵，A^*为A的伴随矩阵。若$A^*=-2A$，则$A^2=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

【答案】(D)

【解析】由$A^*=-2A$，则$A=-\frac{1}{2}A^*$，则$A^2=-\frac{1}{2}A^*A=-\frac{|A|}{2}E$.

又$|A^*|=|-2A|=-8|A|$，即$|A|^2=-8|A|$，故$|A|=-8$或0，

若$|A|=0$，则$r(A^*)\neq r(-2A)$与题意矛盾，故$|A|=-8$，则$A^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

7. 设3阶矩阵A、B满足$AB+BA=A^2+B^2$，且$A\neq B$，则下列错误的是(　　)

(A) $(A-B)^3=0$　　　　(B) $A-B$只有零特征值

(C) A、B不能都是对角矩阵　　　　(D) $A-B$只有一个线性无关的特征向量

【答案】(D)

【解析】由$AB+BA=A^2+B^2$，得$(A-B)^2=O$.

$(A-B)^2=O\Rightarrow (A-B)^3=O$，（A）正确；

$(A-B)^2=O\Rightarrow A-B$的特征值满足$\lambda^2=0$，所以$A-B$只有零特征值，（B）正确；

若A,B都是对角阵，则$A-B$是对角阵，$(A-B)^2=O\Rightarrow A-B=O$，与题意矛盾；（C）正确；

$(A-B)^2=O\Rightarrow r(A-B)+r(A-B)\leq 3$，又$A-B\neq O$，得$r(A-B)=1$，$3-r(A-B)=2$，

所以$A-B$有3重特征值0，只有两个线性无关的特征向量，（D）错误.故选(D).

8. 设随机变量X和Y独立同分布，X概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，

则$P\{XY\leq 1\}=$(　　)

(A) $\dfrac{3}{4}$　　　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{3}$　　　　(D) $\dfrac{1}{6}$

【答案】(B)

【解析】因为随机变量X,Y独立同分布，

故$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot\dfrac{1}{(1+y)^2}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

得 $P\{XY<1\}=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{(1+y)^2}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^3}dx=\frac{1}{2}$.

故选(B).

9. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，随机变量 $Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，且 X 与 Y 独立，则 XY 与 $X+Y$ 的相关系数为(　　)

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

【答案】(C)

【解析】由 $X\sim N(0,1),Y\sim B(2,\frac{1}{2})$ 得 $E(X)=0,D(X)=1,E(Y)=1,D(Y)=\frac{1}{2}$，

又随机变量 X,Y 独立，所以

$$Cov(XY,X+Y)=Cov(XY,X)+Cov(XY,Y)=E(X^2Y)-E(XY)E(X)+E(XY^2)-E(XY)E(Y)$$

$$=E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)+E(X)E(Y^2)-E(X)E^2(Y)$$

$$=D(X)E(Y)+E(X)D(Y)=1,$$

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2$$

$$=[D(X)+E^2(X)][D(Y)+E^2(Y)]=\frac{3}{2},$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\frac{3}{2}.$$

综上，$XY,X+Y$ 的相关系数为 $\rho=\frac{Cov(XY,X+Y)}{\sqrt{D(XY)}\cdot\sqrt{D(X+Y)}}=\frac{2}{3}$，故选(C).

10. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}$（$k=1,2,\ldots$），则对于正整数 m，n，有(　　)

(A) $P\{X>m+n\mid X>m\}=P\{X>m\}$

(B) $P\{X>m+n\mid X>m\}=P\{X>n\}$

(C) $P\{X>m+n\mid X>m\}>P\{X>m\}$

(D) $P\{X>m+n \mid X>m\}>P\{X>n\}$

【答案】(D)

【解析】$P\{X>m+n \mid X>m\}=\dfrac{P\{X>m+n\}}{P\{X>m\}}$，

所以 $P\{X>m+n\}=\sum\limits_{k=m+n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^{k}}\right)=\dfrac{1}{2^{m+n+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{m+n}}$，

$P\{X>m\}=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^{k}}\right)=\dfrac{1}{2^{m+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{m}}$，

$P\{X>n\}=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^{k}}\right)=\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3^{n}}$，

故 $P\{X>m+n\}-P\{X>m\}P\{X>n\}$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n+m}}+\frac{1}{3^{n+m}}-\frac{1}{2^{n}\cdot 3^{m}}-\frac{1}{3^{n}\cdot 2^{m}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3^{n}}-\frac{1}{2^{n}}\right)\left(\frac{1}{3^{m}}-\frac{1}{2^{m}}\right)\right]>0,$$

所以 $P\{X>m+n\}-P\{X>m\}P\{X>n\}>0$，

故选(D).

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\int_0^1 x(x-1)(x-\frac{1}{2})dx=$______________.

【答案】0

【解析】方法 1：$I=\int_0^1 x(x-1)(x-\frac{1}{2})dx=\int_0^1 x(1-x)(\frac{1}{2}-x)dx$ (1)

$$\overset{t=1-x}{=}\int_0^1(1-t)t(t-\frac{1}{2})dt=\int_0^1(1-x)x(x-\frac{1}{2})dx \ (2)$$

$$\overset{\frac{(1)+(2)}{2}}{=}\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\left[(\frac{1}{2}-x)+(x-\frac{1}{2})\right]dx=0$$

方法 2：$I=\int_0^1 x(x-1)(x-\frac{1}{2})dx$（令 $u=1-x$）

$$=\int_0^1 x(1-x)(\frac{1}{2}-x)dx$$

$$\overset{t=\frac{1}{2}-x}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-t)(\frac{1}{2}+t)tdt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-t^2)tdt = 0.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}) =$________.

【答案】1

【解析】$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1+1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

13. 设 P 为常数，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^P(x+1)}dx$ 收敛，则 P 的取值范围是________.

【答案】$0<p<2$

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx$.

当 $x\to 0^+$, $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx$ 与 $\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx$ 同敛散性.要使 $\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx$ 收敛，则 $p-1<1$, 得 $p<2$.

当 $x\to+\infty$, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx$ 与 $\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p+1}}dx$ 同敛散性.要使 $\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p+1}}dx$ 收敛,则 $p+1>1$, 得 $p>0$.

所以收敛范围 $(0,2)$.

14. 微分方程 $y''-2y'=e^x$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解为 $y=$________.

【答案】$y=1+e^{2x}-e^x$

【解析】$\lambda^2-2\lambda=0$，$\lambda(\lambda-2)=0$，$\lambda=0$，$\lambda=2$，齐次方程通解为 $y=c_1+c_2e^{2x}$，

非齐次特解设为 $y^*=Ae^x$，代入原方程得 $A=-1$，所以 $y=c_1+c_2e^{2x}-\mathrm{e}^x$，

代入初值 $y(0)=1, y'(0)=1$，得 $c_1=1, c_2=1$，$y=1+e^{2x}-e^x$.

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$，若二次型 $x^T\left(AA^T\right)x$ 的规范型为 $y_1^{\,2}$，则 $a+b=$__________.

【答案】2

【解析】由题设知 $r(AA^T)=1$，则 $r(A)=1$，于是 $\dfrac{a+2}{1}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{-3a}{-1}$，得 $a=b=1$，则 $a+b=2$.

16. 设随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，随机变量 Y 服从参数为3的泊松分布. X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$__________.

【答案】4

【解析】 $E(X)=1,E(Y)=3,D(X)=1$.

因 $XY=X(Y-X)+X^2$，则

$$E(XY)=E\left[X(Y-X)+X^2\right]=E\left[X(Y-X)\right]+E(X^2)=E(X)E(Y-X)+E(X^2)$$

$$=E(X)\left[E(Y)-E(X)\right]+D(X)+E^2(X)=4.$$

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}-\int_0^1 f\left(x\right)dx$，将 $f\left(x\right)$ 展开成 x 的幂级数.

【解析】第一步，求 $f(x)$ 表达式.

设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，条件化为 $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}-A$，

方程两边在区间 $[0,1]$ 上积分，得 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\dfrac{1}{(2-x)^2}-A\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-A$，得 $A=\dfrac{1}{4}$，

从而 $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}-\dfrac{1}{4},x\neq 2$.

第二步，求 $f(x)$ 的幂级数展开式.

由 $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{4}x+C=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{4}x+C=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n-\dfrac{1}{4}x+C=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{4}x+C$，

得 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^{n}$.

第三步，求收敛域.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{2^{n+2}}x^{n}\right|}=\frac{|x|}{2}<1$，故收敛区间为$(-2,2)$.

$x=2$ 时，$f(x)$ 无定义；$x=-2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(-2)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{4}$ 发散；所以收敛域为$(-2,2)$.

综上，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^{n},x\in(-2,2)$.

18. (本题满分 12 分)

已知函数 $g(x)$ 连续，设 $f(x)=\int_{0}^{x^2}g(xt)\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$ 的表达式，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解析】当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；当 $x\neq0$ 时，利用换元 $u=xt$ 得 $f(x)=\frac{\int_{0}^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x}$，

即 $f(x)=\begin{cases}\frac{\int_{0}^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，

从而 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{0}^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x^3)\cdot3x^2}{2x}=g(0)\cdot0=0$，

当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\frac{g(x^3)\cdot3x^2\cdot x-\int_{0}^{x^3}g(u)\mathrm{d}u\cdot1}{x^2}$，

即 $f'(x)=\begin{cases}\frac{3x^3g(x^3)-\int_{0}^{x^3}g(u)du}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，

由 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3g(x^3)-\int_{0}^{x^3}g(u)du}{x^2}=0-0=0=f'(0)$，得 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

19. (本题满分 12 分)

求 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^{x}$ 的极值.

【解析】极大值为 $f(-2,0)=8e^{-2}$

$$\begin{cases} f_x' = 4xe^x + \left(2x^2 - y^2\right)e^x = 0 \\ f_y' = -2ye^x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1(0,0), P_2(-2,0).$$

$f_{xx}'' = 4e^x + 8xe^x + \left(2x^2 - y^2\right)e^x, f_{xy}'' = -2ye^x, f_{yy}'' = -2e^x$,

对于 $P_1(0,0), A = 4, B = 0, C = -2, \because AC - B^2 < 0 \therefore P_1(0,0)$ 不是极值点.

对于 $P_2(-2,0), A = -4e^{-2}, B = 0, C = -2e^{-2}, \because AC - B^2 > 0, A < 0 \therefore P_2(-2,0)$ 为极大值点，

所以极大值为 $f(-2,0) = 8e^{-2}$.

20. (本题满分 12 分)

设平面区域 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$.

【解析】 $\iint\limits_D \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\left(1+x^2+y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\int_0^1 \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}}\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 \left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 - \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)\Big|_0^1 \quad \text{（利用} \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C\text{）}$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left[\ln\left(1+\sqrt{3}\right) - \ln\sqrt{2}\right] = \ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \ln\left(1+\sqrt{3}\right).$$

21. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，

$G = (\alpha_1, \alpha_2)$.

(1) 证明: α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

(2) 求矩阵 H 使得 $A = GH$, 并求 A^{10}.

【解析】(1)由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，故极大线性无关组中有 2 个向量，又由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均可由 α_1,α_2 线性表示，故 α_1,α_2 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组.

(2)由(1)知 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$，故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，

故 $H=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，由于 $A=GH$，

故 $A^{10}=GH\cdot GH\cdot GH\cdots GH=G(HG)^9H$，

由 $HG=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，

故 $(HG)^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$，

则 $A^{10}=G(HG)^9H=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}$.

22. (本题满分 12 分)

假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值 θ 是未知参数.为估计 θ，取 n 个这种元件同时做寿命试验，试验到出现 k （$1\le k\le n$）个元件失效时停止.

(1) 若 $k=1$，失效元件的寿命记为 T，(i)求 T 的概率密度；(ii)记 $\hat{\theta}=aT$，确定 a，使 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$，并求 $D\left(\hat{\theta}\right)$.

(2) 已知 k 个失效元件的寿命值分别为 $t_1,t_2,\ldots,t_k$，且 $t_1\le t_2\le\ldots\le t_k$，似然函数为

$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求 θ 的最大似然估计值.

【解析】(1)(i) X 为元件的寿命，分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0\end{cases}$，

概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$. $T=\min\{X_1,X_2,\cdots X_n\}$.

$F_T(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{\min\{X_1,X_2,\cdots X_n\}>t\}$

$=1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}\cdots P\{X_n>t\}=1-\prod\limits_{i=1}^{n}P\{X_i>t\}=1-[1-F(t)]^n=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-\frac{nt}{\theta}}, & t\ge 0\end{cases}$.

$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nt}{\theta}}, t>0\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$.

(ii) $T\sim E(\dfrac{n}{\theta})$， $E(\hat\theta)=E(aT)=aE(T)=a\dfrac{\theta}{n}=\theta$，得

$a=n$. $D(\hat\theta)=D(aT)=a^2D(T)=a^2\left(\dfrac{\theta}{n}\right)^2=\theta^2$.

(2) $\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$， $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{-k}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\hat\theta=\dfrac{1}{k}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$.