一、选择题:1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1. 已知当 $x \to 0$ 时，$ax^2+bx+\arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2}-1$ 是等价无穷小，则（　　）

(A) $a=\frac{1}{3},b=-1$　　(B) $a=\frac{1}{3},b=1$

(C) $a=\frac{2}{3},b=-1$　　(D) $a=\frac{2}{3},b=1$

【答案】(A)

【解析】当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2$，由泰勒公式得

$$ax^2+bx+\arcsin x=ax^2+bx+x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

又 $ax^2+bx+\arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2}-1$ 是当 $x\to 0$ 时的等价无穷小，从而 $a=\frac{1}{3}$，$b+1=0$.故选(A).

2. 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是某 2 阶非齐次线性微分方程的两个特解，若常数 λ,μ 使得 $2\lambda y_1(x)+\mu y_2(x)$ 是该方程的解，$\lambda y_1(x)-2\mu y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的解，则（　　）

(A) $\lambda=\frac{1}{5},\mu=\frac{2}{5}$　　(B) $\lambda=\frac{2}{5},\mu=\frac{1}{5}$

(C) $\lambda=\frac{1}{4},\mu=\frac{1}{2}$　　(D) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{4}$

【答案】(B)

【解析】设微分方程为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 是该微分方程的解，

将 $2\lambda y_1(x)+\mu y_2(x)$ 代入得，$2\lambda+\mu=1$，

将 $\lambda y_1(x)-2\mu y_2(x)$ 代入 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，得 $\lambda-2\mu=0$，

解得 $\lambda=\frac{2}{5}$，$\mu=\frac{1}{5}$，故选(B).

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$（a 是非零常数）确定，则（　　）

(A) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$　　(B) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$

(C) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$　　(D) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$

【答案】(A)

【解析】由 $x-az=e^{y+az}$ 方程两边同时对 x,y 分别求偏导得：

$$1-a\frac{\partial z}{\partial x}=ae^{y+az}\frac{\partial z}{\partial x},\quad -a\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y+az}\left(1+a\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \text{解得}\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{a(1+e^{y+az})},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-e^{y+az}}{a(1+e^{y+az})}$$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$.故选(A).

4. 设线密度为1的细直棒的两个端点分别位于点 $(-1,0)$ 和点 $(1,0)$ 处，质量为 m 的质点位于点 $(0,1)$ 处，G 为引力常量，则该细直棒对该质点的引力大小为（　）

(A) $\int_0^1\frac{2Gmx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}dx$　　(B) $\int_0^1\frac{2Gm}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}dx$

(C) $\int_0^1\frac{2Gmx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$　　(D) $\int_0^1\frac{2Gm}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

【答案】(D)

【解析】在区间 $(-1,1)$ 上，该细直棒对质点的引力在 x 轴方向的分力相互抵消为 0，

所以只需考虑在 y 轴方向的分力，当 $x\to x+dx$ 时，

$$dF_y=\frac{Gmdx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},F_y=\int_{-1}^1\frac{Gm}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^1\frac{2Gm}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

故选(D).

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义，则（　）

(A) 当 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,1)$ 单调递增时，$f(0)$ 是极小值

(B) 当 $f(0)$ 是极小值时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减时，在 $(0,1)$ 单调递增

(C) 当 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的时，$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增

(D) 当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增时，$f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的

【答案】(C)

【解析】对于(A)选项，极值的第一判别法要求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故(A)错；

对于(B)选项，考虑函数 $f(x)=-\cos 10x$，该函数在 $x=0$ 处取到极小值，但是在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 都

不是单调函数. 故(B)错;

对于(D)选项, 考虑函数 $f(x)=x^3+x^2-2x$, 那么 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=x^2+2x$ 在 $[-1,1)$ 上单调递增, 但是 $f''(x)=6x+2$ 在 $x=-\dfrac{1}{3}$ 两边异号, 所以 $f(x)$ 的凹凸性改变, 故(D)错;

对于(C) 选项, 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上凹, 要证 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 上单调递增, 即证对于任意的 $x_1<x_2$, 有 $\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}<\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$.

根据凹函数的定义: 对于任意的 $x,y\in[-1,1], x\neq y, \lambda\in(0,1)$, 都有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

令 $\lambda=\dfrac{x_2-x_1}{1-x_1}$, $x=1$, $y=x_1$, 那么

$$f(x_2)=f(\lambda+(1-\lambda)x_1)<\lambda f(1)+(1-\lambda)f(x_1)$$

从而

$$f(x_2)-f(1)<(1-\lambda)[f(x_1)-f(1)]$$

代入 λ 的表达式, 得 $\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}<\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$. 故(C)正确.

6. 已知函数 $f(x)=\int_1^{x^3}\dfrac{e^t}{1+t^2}dt$, f 的反函数为 g, 则 (   )

(A) $g(0)=1, g'(0)=\dfrac{3}{2}e$

(B) $g(0)=1, g'(0)=\dfrac{2}{3e}$

(C) $g(1)=0, g'(1)=\dfrac{3}{2}e$

(D) $g(1)=0, g'(1)=\dfrac{2}{3e}$

【答案】(B)

【解析】由于 $f(1)=0$,所以反函数 $g(0)=1$.

根据反函数求导公式 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}$

因为 $f(x)=\int_1^{x^3}\dfrac{e^t}{1+t^2}dt$,

所以根据变限积分求导公式, $f'(x)=\dfrac{e^{x^3}}{1+x^6}3x^2, f'(1)=\dfrac{3e}{2}$,

所以 $g'(0)=\dfrac{2}{3e}$，

故选(B).

7. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le y\le 1\}$ 上连续，且 $f(x,y)=f(y,x)$，则 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=$（　　）

(A) $2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=n+1-i}^{n} f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\frac{1}{n^2}$　　(B) $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\frac{1}{n^2}$

(C) $2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{2n+1-i} f(\frac{i}{2n},\frac{j}{2n})\frac{1}{n^2}$　　(D) $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{i} f(\frac{i}{2n},\frac{j}{2n})\frac{1}{n^2}$

【答案】(B)

【解析】根据二重积分的轮换对称性和已知条件 $f(x,y)=f(y,x)$，

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(y,x)dxdy=\iint_{D'} f(x,y)dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le y\le 1\},D'=\{(x,y)|0\le y\le x\le 1\}$.

于是 $\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)dxdy+\iint_{D'} f(x,y)dxdy=2\iint_D f(x,y)dxdy$

其中 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

从而所求积分可以表示为

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2}$$

故选(B).

8. 单位矩阵经若干次互换两行得到的矩阵为置换矩阵.设 A 为 n 阶置换矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则（　　）

(A) A^* 为置换矩阵　　(B) A^{-1} 为置换矩阵

(C) $A^{-1}=A^*$　　(D) $A^{-1}=-A^*$

【答案】(B)

【解析】由题设知 $A=P_1\cdot P_2\cdots P_s$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 均为初等矩阵，
则 $A^{-1}=(P_1\cdot P_2\cdots P_s)^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}\cdot P_1^{-1}=P_s\cdots P_2\cdot P_1$ 也为置换矩阵，故选(B).

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\1&1\\a&b\end{pmatrix}$.若存在矩阵 B 满足 $AB=C$，则(　　)

(A) $a=-1$，$b=-1$　　(B) $a=2$，$b=2$

(C) $a=-1$，$b=2$　　(D) $a=2$，$b=-1$

【答案】(A)

【解析】$(A,C)=\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\1&1&3&1&1\\1&1&1&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&-2&a-1&b-1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&0&1&1&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&a+1&b+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&2&-1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&a+1&b+1\end{pmatrix}$

由于$r(A,C)=r(A)$，故$a+1=0,b+1=0$，故$a=-1,b=-1$.故选(A).

10. 设3阶矩阵A，B，满足$AB+BA=A^2+B^2$，则$A\neq B$.则下列结论错误的是(　　)

(A) $(A-B)^3=O$　　(B) $A-B$只有零特征值

(C) A，B不能都是对角矩阵　　(D) $A-B$只有一个线性无关的特征向量

【答案】(D)

【解析】由$AB+BA=A^2+B^2$，得$(A-B)^2=O$.

$(A-B)^2=O\Rightarrow(A-B)^3=O$，(A)正确；

$(A-B)^2=O\Rightarrow A-B$的特征值满足$\lambda^2=0$，所以$A-B$只有零特征值，(B)正确；

若A,B都是对角阵，则$A-B$是对角阵，$(A-B)^2=O\Rightarrow A-B=O$，与题意矛盾，(C)正确；

$(A-B)^2=O\Rightarrow r(A-B)+r(A-B)\le 3$，又$A-B\neq O$，得$r(A-B)=1$，$n-r(A-B)=2$，

从而$A-B$有2个线性无关的特征向量，(D)错误，故选(D).

二、填空题:11～16小题，每小题5分，共30分.

11. 设p为常数，若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx$收敛，则$p$的取值范围是________.

【答案】$0<p<2$

【解析】$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}\mathrm{d}x$，令$f(x)=\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}$，则

$I_1=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(1+x)}\mathrm{d}x$ 都要收敛.

当 $x\to0^+$ 时，$f(x)\sim\frac{1}{x^{p-1}}$，若 I_1 收敛，有 $p-1<1$，即 $p<2$.

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{p+1}}$，若 I_2 收敛，有 $p+1>1$，即 $p>0$.

综上，若积分 I 收敛，需有条件 $0<p<2$.

12. 设 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=$________________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[x+o(x^2)\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

13. 设曲线 $x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=1$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率半径为________________.

【答案】4

【解析】$x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=1$ 两边同时对 x 求导得：

$2x+2\sqrt{3}y+2\sqrt{3}xy'+2yy'=0$，把 $(0,1)$ 代入得到 $y'=-\sqrt{3}$，

再求二阶导得：$2+4\sqrt{3}y'+2\sqrt{3}xy''+2(y')^2+2yy''=0$，代入数值即可得到 $y''=2$，

由曲率公式 $K=\left.\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|_{(0,1)}=\frac{1}{4}$，可得 $R=\frac{1}{K}=4$.

14. 已知函数 $f(x,y)$ 可微，且 $df(0,0)=\pi dx+3dy$，记 $g(x)=f(\ln x,\sin\pi x)$，则 $g'(1)=$

________________.

【答案】-2π

【解析】由分析可知：$f_x'(0,0)=\pi$，$f_y'(0,0)=3$，函数 $g(x)=f(\ln x,\sin\pi x)$ 对 x 求导可得：

$g'(x)=f_x'(\ln x,\sin\pi x)\cdot\frac{1}{x}+f_y'(\ln x,\sin\pi x)\cdot\cos\pi x\cdot\pi$，故 $g'(1)=-2\pi$.

15. 函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均值为________.

【答案】$3\ln 2-1$

【解析】$\int_0^2 \ln(x+2)dx=\int_0^2 \ln(x+2)d(x+2)=(x+2)\ln(x+2)\Big|_0^2-\int_0^2(x+2)\dfrac{1}{x+2}dx=6\ln 2-2$，

故平均值为 $\dfrac{\int_0^2 f(x)dx}{2}=3\ln 2-1$.

16. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$，若二次型 $x^T(AA^T)x$ 的规范形为 y_1^2，则 $a+b=$________.

【答案】2

【解析】由题设知 $r(AA^T)=1$，故 $r(A)=1$，则 $\dfrac{a+2}{1}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{-3a}{-1}$，故 $a=b=1$，则 $a+b=2$.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

计算 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

【解析】$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sin\theta\cdot\sin r\cdot r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin r\mathrm{d}r=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}-2\right)$

$=4\sin\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

18. (本题满分 12 分)

已知函数 $g(x)$ 连续，$f(x)=\int_0^{x^2} g(xt)dt$，求 $f'(x)$ 的表达式，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解析】当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；当 $x\neq 0$ 时，利用换元 $u=xt$ 得 $f(x)=\dfrac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x}$，

即 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x^3)\cdot 3x^2}{2x}=g(0)\cdot 0=0,$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{g(x^3)\cdot 3x^2\cdot x-\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u\cdot 1}{x^2}$，

即 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^3g(x^3)-\int_0^{x^3}g(u)du}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x^3)\cdot 3x^2\cdot x-\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u\cdot 1}{x^2}=0-0=0=f'(0)$，得 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

19. (本题满分 12 分)

求函数 $f(x,y)=\left(2x^2-y^2\right)e^x$ 的极值.

【解析】$\begin{cases}f_x'=4xe^x+\left(2x^2-y^2\right)e^x=0\\ f_y'=-2ye^x=0\end{cases}\Rightarrow P_1(0,0),P_2(-2,0)$

$f_{xx}''=4e^x+8xe^x+\left(2x^2-y^2\right)e^x,f_{xy}''=-2ye^x,f_{yy}''=-2e^x.$

对于 $P_1(0,0),A=4,B=0,C=-2,\because AC-B^2<0\therefore P_1(0,0)$ 不是极值点.

对于 $P_2(-2,0),A=-4e^{-2},B=0,C=-2e^{-2},\because AC-B^2>0,A<0\therefore P_2(-2,0)$ 为极大值点，

所以极大值为 $f(-2,0)=8e^{-2}$.

20. (本题满分 12 分)

已知 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x\geq 0)$ 的拐点，O 为坐标原点，记 D 是第一象限中以曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x\geq x_0)$，线段 OM 及 x 正半轴为边界的无界区域，求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】$y'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},y''=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$，令 $y''=0\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，拐点坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3}{4}\right)$

旋转体体积为：$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{+\infty}\pi\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$$\overset{x=\tan t}{=}\pi\frac{\sqrt{3}}{16}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\frac{1}{\sec^4 t}d(\tan t)=\pi\frac{\sqrt{3}}{16}+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\pi\frac{\sqrt{3}}{16}+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{16}+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{8}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{16}$$

21. (本题满分 12 分)

求微分方程 $x^2y''-2xy'-(y')^2=0(x>2)$ 满足条件 $y|_{x=3}=\dfrac{1}{2}$，$y'|_{x=3}=-9$ 的解.

【解析】令 $y'=p,y''=p'\Rightarrow x^2p'-2xp-p^2=0\Rightarrow p'=\dfrac{2p}{x}+\left(\dfrac{p}{x}\right)^2$，令 $\dfrac{p}{x}=u$

$\Rightarrow u'x+u=2u+u^2 \Rightarrow u'=\dfrac{u+u^2}{x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=\dfrac{u(u+1)}{x} \Rightarrow \dfrac{du}{u(u+1)}=\dfrac{dx}{x}$，左右同时取不定积分

$\Rightarrow \ln\dfrac{u}{u+1}=\ln x+\ln c_1 \Rightarrow \dfrac{u}{u+1}=c_1x \quad \because y(3)=\dfrac{1}{2}, y'(3)=-9 \Rightarrow c_1=\dfrac{1}{2}$

回代 $\dfrac{p}{x}=u \Rightarrow \dfrac{p}{p+x}=\dfrac{x}{2} \Rightarrow p=\dfrac{x^2}{2-x} \Rightarrow y'=\dfrac{x^2}{2-x} \Rightarrow \int y'dx=\int\dfrac{x^2}{2-x}dx$

$\Rightarrow y=\int\dfrac{(x^2-4)+4}{2-x}dx=\int(-x-2+\dfrac{4}{2-x})dx=-\dfrac{x^2}{2}-2x-4\ln(x-2)+c_2$

$\because y(3)=\dfrac{1}{2} \therefore c_2=11$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x-4\ln(x-2)+11$

22. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，记 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$G=(\alpha_1,\alpha_2)$.

(1)证明：α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组；

(2)求矩阵 H 使得 $A=GH$，并求 A^{10}.

【解析】(1)由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，故极大线性无关组中有 2 个向量，又由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均可由 α_1,α_2 线性表示，故 α_1,α_2 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组.

(2)由(1)知 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$，故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$

故 $H=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，由于 $A=GH$，故 $A^{10}=GH\cdot GH\cdot GH\cdot \text{L}\ GH=G(HG)^9H$，

由 $HG=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，故 $(HG)^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$，

则 $A^{10}=G(HG)^9H=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}$.