2020年全国硕士研究生招生考试

数　学　（三）

（科目代码：303）

一、选择题（1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母写在题后的括号内．）

(1) 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$(　　)．

(A)$b\sin a$　　(B)$b\cos a$　　(C)$b\sin f(a)$　　(D)$b\cos f(a)$

(2) 函数$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$的第二类间断点的个数为(　　)．

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(3) 设奇函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数，则(　　)．

(A)$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$是奇函数

(B)$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$是偶函数

(C)$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$是奇函数

(D)$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$是偶函数

(4) 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$的收敛区间为(　　)．

(A)$(-2,6)$　　(B)$(-3,1)$

(C)$(-5,3)$　　(D)$(-17,15)$

(5) 设4阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可逆，a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的通解为(　　)．

(A)$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

(B)$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

(C)$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

(D)$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

(6) 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值$-1$的特征向量，则满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$为(　　)．

(A)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$ (B)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

(C)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ (D)$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

(7) 设 A,B,C 为三个随机事件,且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为( ).

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{12}$

(8) 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$,则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 相互独立的是( ).

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在题中的横线上.)

(9) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

(10) 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在点$(0,-1)$处的切线方程为________.

(11) 设某厂家生产某产品的产量为 Q,成本 $C(Q)=100+13Q$,该产品的单价为 p,需求量 $Q(p)=\frac{800}{p+3}-2$,则该厂家获得最大利润时的产量为________.

(12) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$,则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}(k=1,2,3,\cdots)$,$Y$ 表示 X 被 3 除的余数,则 $E(Y)=$________.

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知 a,b 为常数,若$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小,求 a,b.

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(17)（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$,且 $f(0)=1,f'(0)=-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的表达式;

（Ⅱ）设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(18)（本题满分 10 分）

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$,连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求 $\iint\limits_{D}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上具有连续导数,$f(0)=f(2)=0$,$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$,证明:

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

（Ⅱ）若对任意的 $x\in(0,2)$,$|f'(x)|\leqslant M$,则 $M=0$.

(20)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$,其中 $a\geqslant b$.

（Ⅰ）求 a,b 的值;

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(Ⅰ)证明:$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布,令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0.\end{cases}$$

(Ⅰ)求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布;

(Ⅱ)求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

(23)(本题满分 11 分)

设某元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

(Ⅰ)求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$,其中 $s>0,t>0$;

(Ⅱ)任取 n 个这种元件做寿命试验,测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,若 m 已知,求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.