“高等代数与空间解析几何”考试大纲

**一、考试的学科范围**

考试范围包括：高等代数与空间解析几何两部分内容。

**二、评价目标**

主要考查考生对高等代数与空间解析几何的基础理论、基本知识掌握和运用的情况，要求考生应掌握以下有关知识：

1. 掌握一元多项式的定义，运算及运算律；理解并掌握多项式的次数及次数定理；理解并掌握多项式的整除概念和性质，掌握带余除法及其应用；理解最大公因式的存在性，掌握其求法及表示法；掌握多项式的互素概念及性质；掌握不可约多项式的概念、性质及唯一分解定理，了解标准分解式及应用；理解多项式导数的定义，求法及重因式概念，掌握多项式有无重因式的判别法；掌握多项式函数概念及余式定理，理解两个多项式相等与多项式函数相等的区别和关系。

2. 掌握排列、反序、反序数、对换等概念，理解一个对换改变排列的奇偶性；理解行列式的定义，掌握行列式的性质，并会计算行列式；掌握余子式和代数余子式的定义，掌握行列式依行（列）展开定理的证明及应用，进而总结出行列式的计算方法；掌握Vandermonde行列式的计算及应用；理解Cramer规则及应用。

3. 掌握线性方程组的一些基本概念，如：线性方程组及其解集合，方程组的同解，线性方程组的初等变换，一般解、基础解系等，线性方程组的系数矩阵、增广矩阵等；掌握数域P上的n维向量空间、向量线性相关性及矩阵的秩的概念，如：数域P上的n维向量的定义和运算，数域P上的n维向量空间的定义，向量组的线性组合，向量经向量组线性表出，向量组经向量组线性表出，向量组的等价，向量组的线性相关、线性无关，极大线性无关组，向量组的秩，矩阵的k-级子式，矩阵的行秩、列秩和秩等；掌握解线性方程组的Gauss消元法；掌握数域上n维向量空间中向量的线性相关性的基本结果和方法；掌握矩阵的秩和它的行秩、列秩以及它的不为零的子式的级数之间的关系；掌握线性方程组有解判定定理和线性方程组解的结构定理，掌握齐次线性组的基础解系和一般线性方程组的全部解的计算方法。

4. 理解线性方程组的消元解法与系数矩阵的初等变换的关系；熟练运用矩阵的初等变换解线性方程组；理解并掌握矩阵秩的概念，学会用矩阵的初等变换求矩阵秩的方法；掌握线性方程组有解的判定定理及应用；掌握齐次线性方程组有非零解的充分必要条件；掌握基础解系概念，会求齐次线性方程组的基础解系；掌握齐次方程组、非齐次方程组解的结构，会用特解及齐次线性方程组的基础解系表示非齐次线性方程组的解。

5．掌握二次型的一些基本概念，如：数域上的n元二次型，线性替换，非退化的线性替换，二次型的矩阵，二次型的标准形，复和实二次型的规范形，二次型的正惯性指数，负惯性指数，符号差。矩阵的合同，正定二次型等；掌握用配方法化二次型为标准形，用对二次型的矩阵作变换的方法化二次型为标准形，化复和实二次型为规范形，掌握实二次型的惯性定理和实二次型正定的一些条件。

6．理解和掌握线性空间的定义和基本性质，理解掌握基、维数及坐标的定义和基本性质，基变换与坐标变换的关系，理解掌握线性子空间的定义、性质、基、维数，线性子空间的交与和的性质、基和维数，掌握维数公式及其的理论推导，理解和掌握线性子空间的直和的定义及判定，理解线性空间之间的同构关系。

7．理解和掌握线性变换的定义、基本性质和运算，掌握线性变换的矩阵表示、理论推导和线性变换在不同基下的关系，理解掌握矩阵相似的定义，并总结出矩阵的相似不变性质，理解掌握特征值理论，掌握矩阵[线性变换]的特征值、特征向量的性质和求解方法，了解特征多项式的系数的意义，理解掌握哈密尔顿-凯莱定理及其理论推导，掌握矩阵可以对角化的几个充分或必要条件，理解掌握线性变换的值域、核及不变子空间的定义、性质和线性空间的不变子空间直和分解，掌握简化（线性变换的）矩阵的方法，了解复矩阵的若当标准形理论，掌握最小多项式的定义、性质及其对矩阵的影响。

8. 理解掌握λ-矩阵的标准形理论，熟练计算特征矩阵的不变因子和初等因子，理解掌握矩阵相似以及复矩阵可以对角化的充分或必要条件，了解矩阵若当标准形的理论推导，能够计算方阵的若当标准形。

9. 理解掌握欧几里得空间的定义和基本性质，掌握度量矩阵的定义及性质，理解掌握施密特正交化过程，熟练计算标准正交基，理解掌握正交矩阵、正交变换的定义及性质，掌握线性空间的正交分解，理解掌握对称矩阵的标准形理论，熟练计算对称矩阵的标准形，了解最小二乘法及酉空间的相关概念和性质，总结欧几里得空间及酉空间的共性。

10. 理解向量的概念，掌握向量的线性运算及其运算规律，掌握共线向量及共面向量的判定，线段的定比分点，射影及其相关的结论，理解内积定义及其运算规律，内积的应用，向量外积的定义，外积的应用，外积的运算规律，混合积的定义及其几何意义，掌握三个向量共面的充要条件，双重外积的运算。

11. 掌握空间直角坐标系的建立，空间点和向量的坐标表示，向量运算的坐标表示，空间解析几何的两个基本公式，掌握几种不同形式的平面方程（点法式，一般式，截距式，三点式），二平面的位置关系，几种不同形式的直线方程（参数式、标准式、一般式、两点式）两直线的位置关系，直线和平面的位置关系，掌握两条直线共面、异面、相交的充要条件，平面束，点到平面的距离，点到直线的距离，二异面直线间的距离及公垂线方程。

12. 理解曲面与方程的关系，掌握球面方程，空间圆的方程，直圆柱面的方程，直圆锥面的方程，曲线族产生曲面的理论，能够用曲面族产生曲面理论建立曲面方程、柱面方程、锥面方程、旋转曲面方程，掌握空间曲线的参数方程，空间曲面的参数方程，球面坐标，柱面坐标，六种二次曲面及其标准方程（椭球面、虚椭球面、双叶双曲面、单叶双曲面、椭圆抛物面和双叶抛物面），六种二次曲面的形状及其几何性质。

13. 理解直线与二次曲线的相关位置，掌握二次曲线的切线，渐近方向，二次曲线的直径，共扼直径，二次曲线的中心，主方向，主轴，二次曲线的特征方程与特征根，坐标系的变换（平移变换和旋转变换），能够通过坐标变换化简二次曲线，掌握二次曲线的分类，二次曲线的不变量（平移及旋转不变量），能够根据不变量判断曲线类型，三类曲线的规范方程，空间直角坐标变换，正交条件，掌握直线和一般曲面的位置关系，掌握二次曲面的切平面、法线，切锥面，二次曲面的中心，不变量和规范方程。

**三、试题主要类型**

1．答题时间：180分钟。

2．题型：计算题和证明题。

**四、考查要点**

（一）高等代数

1. 多项式的运算，带余除法，辗转相除法，整除，因式分解及唯一性定理，重因式，余数定理，复系数多项式因式分解定理，实系数多项式因式分解定理，有理系数多项式的基本性质，本原多项式及其性质，艾森斯坦因判别法，对称多项式基本定理；

2. 排列的定义和性质，行列式的定义、性质及计算，行列式[矩阵]的初等行[列]变换与行列式的计算，行列式按照一行[列]展开，代数余子式的性质，范德蒙行列式的性质与计算，克兰姆法则，拉普拉斯定理和行列式的乘法规则；

3. 高斯消元法，n维向量空间的定义及性质，矩阵的秩、秩的性质及求法，（齐次）线性方程组有（非零）解的判定，线性方程组解的结构及其求解；

4. 矩阵的加、减、乘积、数量乘积等运算以及矩阵转置，矩阵乘积的行列式和矩阵乘积的秩的性质，伴随矩阵的定义及性质，可逆矩阵的定义、性质、判定及其逆矩阵的求法，初等矩阵的性质及可逆矩阵的分解，分块矩阵的运算、初等变换及其应用，广义逆矩阵的性质及齐次线性方程组解的结构；

5. 二次型的定义及矩阵表示，二次型[对称矩阵]的标准形及化简二次型[对称矩阵]的理论推导，复、实系数二次型的规范形的唯一性及理论推导，（半）正定二次型[矩阵]的定义、性质及判定，矩阵的合同不变性质；

6. 线性空间的定义及基本性质，基、维数及坐标的定义和基本性质，基变换与坐标变换的关系，线性子空间的定义、性质、基、维数，线性子空间的交与和的性质、基和维数，维数公式，线性子空间的直和的定义及判定，线性空间的同构；

7. 线性变换的定义、性质和运算，线性变换的矩阵表示和性质，线性变换[方阵]的特征值理论，线性变换[矩阵]的对角化，线性变换的值域、核及不变子空间的定义、性质和线性空间的直和分解，线性变换[矩阵]的若当标准形、极小多项式介绍；

8. λ-矩阵的标准形理论，行列式因子、不变因子、初等因子的定义、性质及求法，矩阵的特征矩阵的化简，矩阵相似的充分或必要条件，矩阵的若当标准形理论及其导出结果；

9. 欧几里得空间的定义和基本性质，度量矩阵的定义及性质，施密特（Schimidt）正交化过程，正交矩阵、正交变换的定义及性质，线性空间的正交分解，对称矩阵的标准形理论。

（二）空间解析几何

1. 向量及其线性运算，向量的内积，向量的外积，混合积和双重外积；

2. 空间直角坐标系及用坐标进行向量运算，平面方程，空间直线方程，平面与直线的有关问题，距离；

3. 曲面与方程，球面、直圆柱面和直圆锥面，曲线族产生的理论 柱面、锥面及旋转曲面的方程，空间曲线和曲面的参数方程，二次曲面，单叶双曲面和双曲抛物面的直纹线；

4. 二次曲线的切线、中心、直径、渐近线和主轴，二次曲线的化简和二次曲线的分类，二次曲线的不变量、类型判别及规范方程，空间直角坐标变换，一般二次曲面方程的讨论。

**五、参考书目**

1. 北京大学数学系代数小组 主编，《高等代数》（第五版），北京：高等教育出版社，2019年.

2. 吕林根，徐子道 主编，《解析几何》（第五版），北京：高等教育出版社，2019年.