

# 中国民航大学中欧航空工程师学院研究生入学考试 《数学分析与高等代数》考试大纲

## 一、考题类型

《数学分析与高等代数》试卷共设置六个题目，其中两个基础题各20分，两个简答题各25分，两个综合题各30分，总计150分。

## 二、参考书目

- 《中欧学院预科数学讲义》，中欧学院数学教研室

## 三、知识要点

### 第一部分：单变量微积分

#### (一) 数列

- 1 数列极限的定义、运算法则
- 2 判断数列收敛方法：单调有界收敛定理、夹挤定理、收敛数列子列必收敛、柯西数列必收敛
- 3 数列的比较： $O, o$ 与等价；常见数列的比较
- 4 递归数列的极限

#### (二) 极限与连续

- 1 函数极限的定义（9种情况），函数极限的四则运算，复合函数的极限
- 2 函数在一点极限存在性判断：夹挤定理、单调函数极限的存在性、归结原理
- 3 函数的比较： $O, o$ 与等价；常见函数的比较
- 4 闭区间上连续函数定理：介值定理、最值定理

#### (三) 导数

- 1 导数、左导数、右导数的定义，导数的四则运算，复合函数求导，反函数求导
- 2 高阶导数，莱布尼兹公式， $C^k$ -类函数定义、运算法则
- 3 基本初等函数的导函数（求导公式）
- 4 罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理，有限增量不等式
- 5 极限展开式的定义、运算法则

6 基本初等函数的极限展开式，极限展开式的应用：求极限、找等价

#### (四) 积分

- 1 闭区间上分段连续函数积分的定义
- 2 积分的保序性，线性性，可加性，柯西-施瓦茨不等式
- 3 连续函数的原函数
- 4 积分的计算：分部积分与变量替换公式，有理函数的积分，无理函数的积分，含有三角函数的复合函数的积分

### 第二部分：高等代数

#### (五) 自然数集

- 1 有限集基数计算公式
- 2 数学归纳原理

#### (六) 向量空间

- 1 向量空间、子空间的定义，常见向量空间的例子
- 2 子空间的和与直和，互补子空间
- 3 线性映射的复合；线性映射的核与象集
- 5 对称和投影的定义及等价刻画

#### (七) 有限维向量空间

- 1 线性无关族，线性相关族，生成族及向量空间基的定义
- 2 有限维向量空间维数公式
- 3 基的扩充定理，补空间的存在性与构造
- 4 秩定理

#### (八) 多项式

- 1 多项式的次数，多项式的加法和乘法运算
- 2  $\mathbb{K}[X]$ 的向量空间结构和环结构
- 3 多项式的因式和倍式， $\mathbb{K}[X]$ 中的带余除法，辗转相除法
- 4 多项式的导数，高阶导数，多项式重根的刻画
- 5 公因式，互素多项式，最大公因式，最小公倍式，贝祖定理，高斯定理
- 6 不可约多项式，多项式不可约分解定理，实系数多项式的不可约分解

## (九) 矩阵

- 1 矩阵的运算：加法、乘法、数乘与转置
- 2 线性映射在给定基下的表示矩阵，线性映射的坐标表示公式
- 3 过渡矩阵，同一线性映射在不同基下的表示矩阵之间的关系，坐标变换公式
- 4 矩阵的初等行、列变换，利用矩阵初等变换求可逆矩阵的逆矩阵
- 5 矩阵秩的定义，利用矩阵初等变换求矩阵的秩，矩阵秩的等价刻画
- 6 线性方程组解的结构，利用矩阵初等变换求解线性方程组

## (十) 行列式

- 1 行列式的定义、基本性质
- 2 矩阵相乘的行列式，转置矩阵的行列式
- 3 余子式，代数余子式，行列式按行、按列展开公式
- 4 伴随矩阵，利用伴随矩阵表示可逆矩阵的逆矩阵
- 5 行列式常用计算方法：初等变换、数学归纳法、多项式法等

## (十一) 线性变换的约化

- 1 不变子空间、诱导映射的定义
- 2 线性变换在不变子空间的直和分解下的矩阵表示（准对角矩阵）
- 3 线性变换（或方阵）特征值、特征向量、特征子空间及谱的定义
- 4 特征多项式，特征值的重数，汉密尔顿-凯莱定理
- 5 线性变换（或方阵）可对角化的定义；线性变换（或方阵）可对角化判别准则
- 6 将一个可对角化的方阵对角化

## (十二) 欧氏空间

- 1 内积的定义，柯西-施瓦茨不等式
- 2 向量正交、正交族、单位正交族及单位正交基的定义
- 3 施密特正交化定理
- 4 正交补，正交对称，正交投影与距离
- 5 正交变换和正交矩阵的定义及等价刻画
- 6 自伴变换的约化，对称矩阵的对角化，二次曲面的约化

### (十三) 数项级数

- 1 黎曼级数的敛散性，正项级数收敛判别法：比较判别法、积分比较法
- 2 交错级数的敛散性，收敛交错级数余项的上界
- 3 级数收敛的柯西准则，达朗贝尔判别法
- 4 绝对收敛级数必收敛，绝对收敛级数的柯西乘积

### (十四) 函数列与函数项级数

- 1 函数列简单收敛、一致收敛定义
- 2 函数项级数简单收敛，一致收敛，依范数收敛定义
- 3 函数项级数一致收敛和依范数收敛各种判别法
- 4 一致收敛函数列（函数项级数）的和函数的连续性、可导性定理
- 5 函数项级数积分换序定理

### (十五) 幂级数

- 1 幂级数收敛半径的定义
- 2 求幂级数收敛半径常用方法：定义、达朗贝尔判别法、比较判别法
- 3 两个幂级数和函数的收敛半径，两个幂级数柯西乘积的收敛半径
- 4 实变量幂级数和函数的性质：连续性、可导性以及和函数的积分
- 5 基本初等函数的幂级数展开式
- 6 实变量函数幂级数展开定义、运算法则

### (十六) 广义积分

- 1 非负函数可积性定义，可积性判别准则：**Bertrand**积分、比较判别法、原函数判别法；
- 2 复值函数可积性定义、可积性判别准则
- 3 控制收敛定理，逐项积分定理
- 4 广义积分的计算、变量替换公式
- 5 含参变量的积分：连续性定理和可导性定理

### (十七) 傅里叶级数

- 1 傅里叶系数的定义、傅里叶系数的计算
- 2 傅里叶级数收敛方式，傅里叶展开式

- 3 均方收敛定理, 帕塞瓦尔-贝塞尔等式

#### 第四部分: 多变量微积分

##### (十八) 多元函数的极限与连续性

- 1 平面点集的有关概念以及平面点列的概念
- 2 二元函数极限的概念与计算
- 3 二元函数连续性概念
- 4 向量空间 $C(A, \mathbb{R})$ 、 $C(A, \mathbb{R}^2)$

##### (十九) 多元函数微分学

- 1 多元函数的偏导数概念与计算
- 2 多元函数的一阶极限展开式、可微性与全微分概念
- 3 复合函数计算偏导数/导数的链式法则
- 4 方向导数的概念、梯度的概念与计算
- 5 高阶偏导数的概念与计算, Schwarz定理
- 6 二元函数的Taylor公式、带积分型余项的Taylor公式、二阶Taylor-Young公式
- 7 二元函数的极值: 极值的概念,  $C^1$ -类函数极值的必要条件、 $C^2$ -类函数极值的充分条件

##### (二十) 重积分

- 1 有界闭集上连续函数二重积分的定义及其性质
- 2 二重积分的常用计算方法: 在直角坐标系下计算、利用变量替换法计算(包括利用极坐标计算)
- 3 有界闭集上连续函数三重积分的定义及其性质
- 4 三重积分的常用计算方法: 在直角坐标系下计算(包括投影法和截面法)、利用变量替换法计算(包括利用柱坐标、球坐标计算)

#### 第五部分: 微分方程

##### (二十一) 微分方程

- 1 一阶线性微分方程求解, 必要时考虑解的连接
- 2 常见二阶常系数线性微分方程求解
- 3 常系数一阶线性微分方程组求解
- 4 求二阶齐次线性微分方程多项式解和幂级数解
- 5 降阶法求解二阶线性微分方程