

2023 年全国硕士研究生招生考试（数学三）试题及答案解析

1. 已知函数 $f(x, y) = \ln(y + |x \sin y|)$, 则

- A. $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}$ 不存在, $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}$ 存在. B. $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}$ 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}$ 不存在.
- C. $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}$ 均存在. D. $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,1)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,1)}$ 均不存在.

【答案】A

【解析】

$$f(x, y) = \ln(y + |x \sin y|), \quad f(0, 1) = \ln(1 + 0) = 0, \quad f(x, 1) = \ln(1 + |x \sin 1|)$$

$$f(0, y) = \ln(1 + 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 1) - f(0, 1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \sin 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin 1|}{x} \text{ 不存在}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 1)}{y - 0} = 0$$

故选 A.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0, \\ (x+1)\cos x, & x > 0 \end{cases}$ 的一个原函数为

$$A. F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x \leq 0, \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

$$B. F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, & x \leq 0, \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

$$C. F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x), & x \leq 0, \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0. \end{cases}$$

$$D. F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, & x \leq 0, \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0. \end{cases}$$

【答案】D

【解析】

$$\int (x+1) \cos x dx = \int (x+1) d \sin x = (x+1) \sin x - \int \sin x dx = (x+1) \sin x + \cos x + c$$

故排除 AB, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0$, 排除 C, 故选 D.

3. 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则

A. $a < 0, b > 0$.

B. $a > 0, b > 0$.

C. $a = 0, b > 0$.

D. $a = 0, b < 0$.

【答案】C

【解析】当 $y'' + ay' + by = 0$ 有实根时, $a^2 - 4b \geq 0$, 设根为 r_1, r_2 , 则 $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ 或 $y = (c_1 + c_2 r) e^{r_1 x} (r_1 = r_2)$. 故此时存在解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界. 当 $a^2 - 4b < 0$ 时, $y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{ax}$, 若想解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界, 因此 $a = 0$, 结合 $a^2 - 4b < 0$ 可得 $b > 0$. 故选 C.

4. 已知 $a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则“ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”是“ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的

A. 充分必要条件.

B. 充分不必要条件.

C. 必要不充分条件.

D. 既不充分也不必要条件.

【答案】A

【解析】由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 由 $|a_n| = |b_n + a_n - b_n| \leq |b_n| + |a_n - b_n|$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $|b_n| = |a_n + b_n - a_n| \leq |a_n| + |b_n - a_n|$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

故选 A.

5. 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, M^* 为矩阵 M 的伴随矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* =$

A. $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}.$

B. $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$

C. $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$

D. $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}.$

【答案】D

【解析】 $\begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1A & X_1 + X_2B \\ X_3A & X_3 + X_4B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix}^* = |A| \cdot |B| \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B| \cdot A^* & -A^*B^* \\ O & |A| \cdot B^* \end{bmatrix}.$$

6 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为

A. $y_1^2 + y_2^2$

B. $y_1^2 - y_2^2$

C. $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$

D. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

【答案】B

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 7+\lambda & -7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -3-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 7+\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$= (7 + \lambda)\lambda(3 - \lambda)$. 故选 B.

7. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由

β_1, β_2 线性表示, 则 $\gamma =$

- A. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ B. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ C. $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ D. $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$

【答案】D

【解析】

$$\gamma = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2, \quad k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 - l_1 \beta_1 - l_2 \beta_2 = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = -l_1 \\ x_4 = -l_2 \end{cases} \quad x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \end{cases}, \gamma = 3k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

8. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) =$

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{e}$ D. 1

【解析】C

【答案】 $E(|X - 1|) = E(X - 1) + 2 \cdot P\{X = 0\} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1}$.

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 为来自总体 $N(\mu_2, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2, \text{ 则}$$

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$

B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$

D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$

【答案】D

【解析】

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} / n-1}{\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2} / m-1} = \frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1).$$

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\sigma (\sigma > 0)$ 是未知参数. 记

$\widehat{\sigma} = a|X_1 - X_2|$, 若 $E(\widehat{\sigma}) = \sigma$, 则 $a =$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

C. $\sqrt{\pi}$

D. $\sqrt{2\pi}$

【答案】A

【解析】 $E(a|X_1 - X_2|) = aE(|X_1 - X_2|) = a \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} = \sigma, \quad a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

其中: $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 令 $Z = X_1 - X_2$

$$\begin{aligned} E(|X_1 - X_2|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{z}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz \\ &= 2 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} (-2\sigma^2) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

二、填空题

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(2 - \frac{1}{t} \sin t - \cos t \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \sin t - t \cos t}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \left(t - \frac{1}{6}t^3 \right) - t \left(1 - \frac{1}{2}t^2 \right) + o(t^3)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^3}{t^3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

12. 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $df(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $f(1, 1) = \frac{\pi}{4}$, 则 $f(\sqrt{3}, 3) =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{12}$

【解析】 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + c(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + c'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + c'(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \text{故 } c'(y) = 0, \quad c(y) = 0$$

$$f(1, 1) = \frac{\pi}{4}, \quad c = \frac{\pi}{4}, \quad f(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{4}$$

$$f(\sqrt{3}, 3) = -\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$ _____.

【答案】 $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

【解析】 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

14. 设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$, 从 0 时刻到 t 时刻的平均资产等于 $\frac{f(t)}{t} - t$, 假设 $f(t)$ 连续且 $f(0)=0$, 则 $f(t)=$ _____.

【答案】 $f(t) = 2(1-t) - 2e^t$

【解析】

$$f'(t) - 2t = f(t)$$

$$f'(t) = f(t) + 2t$$

$$f'(t) - f(t) = 2t$$

$$f(t) = e^{-\int -1 dt} \left[\int 2te^{\int -1 dt} dt + c \right] = e^t \left[\int 2t \cdot e^{-t} dt + c \right]$$

$$= 2e^t \left[(1-t)e^{-t} + c \right] = 2(1-t) + 2ce^t$$

$$f(0) = 2 + 2c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$f(t) = 2(1-t) - 2e^t$$

15. 已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数, 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 8

【解析】

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad r \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 3, \quad r \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8$$

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B(1, p), Y \sim B(2, p), p \in (0, 1)$, 则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为_____.

【答案】 $p(p-1)$

$$\text{Cov}(X+Y, X-Y) = DX - DY$$

【解析】
$$= p(1-p) - 2p(1-p)$$

$$= -p(1-p) = p(p-1)$$

三、解答题

17. 已知可导函数 $y=y(x)$ 满足 $ae^x + y^2 + y - \ln(1+x) \cos y + b = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 判断 $x = 0$ 是否为 $y(x)$ 的极值点.

【解析】

(1) 将 $(0, 0)$ 代入得 $a + b = 0$

将 $y'(0) = 0$ 代入 $ae^x + 2yy' + y' - \frac{1}{1+x} \cos y + \ln(1+x)(\sin y)y' = 0$

得 $a + 0 - 1 = 0$, 所以 $a = 1, b = -1$

(2) 由 $e^x + 2yy' + y' - \frac{1}{1+x} \cos y + \ln(1+x) \sin y \cdot y' = 0$

两边对 x 求导, 得:

$$e^x + 2(y')^2 + 2yy'' + y'' + \frac{1}{(1+x)^2} \cos y + \frac{1}{1+x} \sin y$$

$$+ \frac{1}{1+x} \sin y \cdot y' + \ln(1+x) [\cos y \cdot (y')^2 + \sin y y'] = 0$$

代入, 得 $1 + y''(0) + 1 = 0, y''(0) = -2 < 0, x = 0$ 为极大值.

18. 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1\}$.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan t \cdot \sec t} \cdot \sec^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t}{\tan t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc t dt = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \pi \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int_1^{+\infty} \pi \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

19. 已知平面区域 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. 计算二重积分 $\iint_D |\sqrt{x^2 + y^2} - 1| dx dy$.

【解析】

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{原式} = \iint_{D_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + \iint_{D_2} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dx dy$$

$$\text{其中} \iint_{D_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 (1-r) r dr + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (1-r) r dr = \frac{13}{18}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{10}{9}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dx dy &= \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dx dy - \iint_{D_1} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (r-1) r dr \\ &+ \iint_{D_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \frac{22}{9} - \frac{5}{18}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

所以原式 = $\frac{4}{3} + \frac{4}{9}\pi - \sqrt{3}$.

20. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数, 证明:

(1) 若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$ 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|.$$

【解析】

$$(1) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

则 $f(a) = f'(0)a + \frac{1}{2}f''(\xi_2)a^2$, $f(-a) = f'(0)(-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2$, 其中 $\xi_1 \in (-a, 0)$, $\xi_2 \in (0, a)$.

$$f(-a) + f(a) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]a^2$$

由介值定理可知平均值 $\frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)] = \frac{f(-a) + f(a)}{a^2} = f''(\xi)$, $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-a, a)$,

$\therefore$ 即证

(2)

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值 即 $x_0 \in (-a, a)$, $f'(x_0) = 0$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

代入 $x = -a$, $x = a$

$$f(-a) = f(x_0) + \frac{f''(\eta_1)}{2}(a + x_0)^2 \quad (1), \eta_1 \in (-a, x_0)$$

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\eta_2)}{2}(a - x_0)^2 \quad (2), \eta_2 \in (x_0, a)$$

(2) - (1) 得

$$f(a) - f(-a) = \frac{f'(\eta_2)}{2}(a - x_0)^2 - \frac{f'(\eta_1)}{2}(a + x_0)^2$$

$$|f(a) - f(-a)| = \left| \frac{f''(\eta_2)}{2}(a - x_0)^2 - \frac{f''(\eta_1)}{2}(a + x_0)^2 \right|$$

$$\leq \left| \frac{f''(\eta)}{2}(a - x_0)^2 \right| + \left| \frac{f''(\eta)}{2}(a + x_0)^2 \right|$$

$$\leq \left| \frac{f''(\eta)}{2} \right| [(a - x_0)^2 + (a + x_0)^2]$$

$$= \left(\frac{f''(\eta)}{2} \right) (2a^2 + 2x_0^2)$$

$$= |f''(\eta)| (a^2 + x_0^2)$$

$$\leq |f''(\eta)| \cdot 2a^2, \quad \text{其中 } f''(\eta) = \max \{ f''(\eta_1), f''(\eta_2) \}, \eta \in (-a, a)$$

$$\therefore |f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|.$$

21. 设矩阵 A 满足对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$

(1) 求 A ;

(2) 求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【解析】

(1) 由题可知, $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $|A - \lambda E| = -(2 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

$\therefore A$ 中 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

A 中 λ_1 对应的线性无关特征向量 $\alpha_1 = (4, 3, 1)^T$.

A 中 λ_2 对应的线性无关特征向量 $\alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)^T$

A 中 λ_3 对应的线性无关特征向量 $\alpha_3 = (0, -1, 1)^T$

$\therefore P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

22. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, -\infty < x < +\infty$, 令 $Y = e^x$.

- (1) 求 X 的分布函数;
- (2) 求 Y 的概率密度;
- (3) Y 的期望是否存在?

【解析】

$$(1) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{d(e^t + 1)}{(1+e^t)^2}$$

$$= -\frac{1}{1+e^t} \Big|_{-\infty}^x$$

$$= 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

(2) 当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{y}{(1+y)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{(1+y)^2}$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2} & y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $EY = \int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y)^2} dy$, $\frac{y}{(1+y)^2} \sim \frac{1}{y}$, 所以期望不存在.

在职研究生招生信息网是以报考在职研究生为主题的官方网站，主要提供在职硕士、在职博士、MBA、EMBA 等类别的在职研究生招生简章、报考条件、报名时间、报名入口等招生信息，是报考在职研究生综合门户网站。

- 同等学力
- 专业硕士
- 国际硕士
- 中外合办
- 在职博士
- 国际博士
- 高级研修
- 高端培训

扫一扫，关注在职研究生信息网官方微信，及时获取招生资讯、报考常见问题、备考经验分享等信息！还有免费的人工在线答疑服务！



微信服务号



微信订阅号

在职研究生招生信息网 全国统一报名咨询电话：40004-98986

更多专业硕士免费备考资料下载，历年真题，考试大纲，大纲解析，复习指导等，应有尽有！