2022年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题及答案

一、选择题：1~10小题，每小题5分，共50分，下列每题给出4个选项，只有一个选项是复合题目要求的，请将所选选项前面的字母填在答题卡指定的位置.

1.当$x \to 0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$是非零无穷小量，给出以下四个命题，其中所有正确的序号是（ ）

①若$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$

②若$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则$\alpha(x) \sim \beta(x)$

③若$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$

④若$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则$\alpha(x) \sim \beta(x)$

(A)①②　　(B)①④　　(C)①③④　　(D)②③④

参考答案：(C)

2.已知$a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}(n = 1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$（ ）

(A)有最大值，有最小值　　(B)有最大值，没有最小值

(C)没有最大值，有最小值　　(D)没有最大值，没有最小值

参考答案：(A)

3.设函数$f(t)$连续，令$F(x, y) = \int_0^{x-y}(x - y - t)f(t)\,dt$，则（ ）

(A)$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　(B)$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C)$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$，　$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　　　(D)$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$，　$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

参考答案：(C)

4.已知$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\frac{\ln 1+x}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$，则（ ）

(A)$I_1<I_2<I_3$　(B)$I_2<I_3<I_1$　(C)$I_1<I_3<I_2$　(D)$I_2<I_1<I_3$

参考答案：(A)

5.设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为 1，-1，0 的充分必要条件是（ ）

(A)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$　　　(B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}}$

(C)存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q^{-1}}$　　　(D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P^{T}}$

参考答案：(B)

6.设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则线性方程组$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$解的情况为（ ）

(A)无解　(B)有解　(C)有无穷多解或无解　(D)有唯一解或无解

参考答案：(D)

7.设$\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$与$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围是（ ）

(A)$\{0,1\}$　　　　(B)$\{\lambda|\lambda\in R，\lambda\neq-2\}$

(C)$\{\lambda|\lambda \in R，\lambda \neq -1，\lambda \neq -2\}$ (D)$\{\lambda|\lambda \in R，\lambda \neq -1\}$

参考答案：(C)

8.设随机变量$X \sim N(0,4)$，随机变量$Y \sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，且$X$与$Y$不相关，则$D(X-3Y+1)=$（ ）

(A)2 (B)4 (C)6 (D)10

参考答案：(D)

9.设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，且$X_1$的概率密度为$\begin{cases}1-|x|, & |x|<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则当$n \to \infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$依概率收敛于（ ）

(A)$\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

参考答案：(B)

10.设二维随机变量$(X，Y)$的概率分布

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件$\{\max\{X,Y\}=2\}$与事件$\{\min\{X,Y\}=1\}$相互独立，则$\operatorname{cov}(X,Y)=$（ ）

(A)-0.6 (B)-0.36 (C)0 (D)0.48

参考答案：(B)

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} =$ ______.

参考答案：$e^{\frac{1}{2}}$.

12.$\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx =$______.

参考答案：$\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

13.已知函数$f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则$f'''(x) =$______.

参考答案：0.

14.已知函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y-x)\,dy =$______.

参考答案：$(e-1)^2$.

15.设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，交换$\boldsymbol{A}$的第二行和第三行，再将第 2 列的-1 倍加到第 1 列，得到矩阵$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}$的迹$tr(\boldsymbol{A}^{-1}) =$______.

参考答案：-1.

16.设A，B，C为随机事件，且A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C) =$______.

参考答案：$\frac{5}{8}$.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设函数$y(x)$是微分方程$y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$满足条件$y(1) = 3$ 的解，求$y(x)$的渐进线.

解：由$y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$，可知

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[\int 2\sqrt{x}e^{\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\,dx + C\right] = e^{-\sqrt{x}}\left[\int 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx + C\right]$$

$$= e^{-\sqrt{x}}\left[2xe^{\sqrt{x}} + C\right] = 2x + Ce^{-\sqrt{x}}\ ,$$

由$y(1) = 3$，得$C = e$，即$y(x) = 2x + e^{1-\sqrt{x}}$，

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2x + e^{1-\sqrt{x}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty}[y(x) - 2x] = \lim_{x\to\infty} e^{1-\sqrt{x}} = 0,$$

故，$y(x)$的渐进线为$y = 2x$.

18.设某产品的产量Q由资本投入量x和劳动投入量y决定，生产函数为$Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价$P$与$Q$的关系为$P = 1160 - 1.5Q$，若单位资本投入 和但单位劳动投入的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

解：利润$L = PQ - 6x - 8y = (1160 - 1.5Q)Q - 6x - 8y = 13920x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - 216xy^{\frac{1}{3}} - 6x - 8y$，

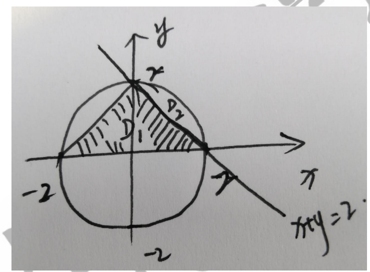
求导，$\begin{cases} L'_x = 6960x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - 216y^{\frac{1}{3}} - 6 = 2y^{\frac{1}{3}}\left(2320x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}} - 72\right) - 6 = 0 \\ L'_y = 2320x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}} - 72xy^{-\frac{2}{3}} - 8 = xy^{-\frac{2}{3}}\left(2320x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}} - 72\right) - 8 = 0 \end{cases}$，

解得驻点$(256,64)$，此时$Q = 12 \times \sqrt{256} \times \sqrt[6]{64} = 384.$

故利润L在产量$Q = 384$ 处取得最大值.

19.已知平面区域$D = \left\{(x,y)\middle| y-2 \le x \le \sqrt{4-y^2}，0 \le y \le 2\right\}$，计算$I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy$.

解：从右图可知$D = D_1 + D_2$，



$I = \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy + \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy$ ，

其中D_1关于y轴对称，

上式中$\iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy = \iint_{D_1} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx\,dy + \iint_{D_1} \frac{2xy}{x^2+y^2}dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy = 4$，

$\iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2} \frac{r^2-2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} r\,dr$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2} (1-\sin 2\theta) r\,dr \ = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta\,(1-\sin 2\theta)}{1+\sin 2\theta} d\theta$

$= 2\pi - 6$，

故，$I = \iint_{D_1} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy + \iint_{D_2} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx\,dy = 4 + 2\pi - 6 = 2\pi - 2.$

20.求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)} x^{2n}$的收敛域和函数$S(x)$.

解：由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}x^{2n+2}}{\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}}\right|<1$，解得$|x|<1$，即收敛半径$R=1$，收敛区域为$(-1,1)$.

当$x=\pm 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}$收敛，收敛域为$(-1,1)$，

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(2n+1)}$;

令$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$x\neq 0$，

由于$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$，可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，

则$S_1(x)=\frac{1}{x}\arctan x$，$x\neq 0$；

令$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(2n+1)}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$，$x\neq 0$，

由于$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{4}{4-x^2}$，可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}=\int_0^x\frac{4}{4-t^2}dt=\ln\frac{2+x}{2-x}$,

则$S_2(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}$，$x\neq 0$；

又因为$S(0)=2$，

故，$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\arctan x+\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}, & x\neq 0,\ x\in[-1,1]\\ 2, & x=0\end{cases}$.

21.已知二次型$f(x_1，x_2，x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

(1)求正交变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$将$f(x_1，x_2，x_3)$化为标准形；

(2)证明$\min\limits_{x\neq 0}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.

解：(1)令$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2)=0$，

特征值$\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=2$，

当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，

当$\lambda_3=2$时，$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，

存在$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1，\boldsymbol{\eta}_2，\boldsymbol{\eta}_3)$正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1，x_2，x_3)$化为标准形$f=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.

(2)$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$,

$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\frac{f(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}=\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2+\frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$,

当$y_1=y_2=0$，$y_3\neq 0$时，$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2+\frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$最小，最小值为2，

即$\min\limits_{x\neq 0}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$，得证.

22.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自期望为θ的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$是来自期望为2θ的指数分布的简单随机样本，$X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$相互独立，求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并

求$D(\hat{\theta})$.

解：由题知，X的概率密度为$f_x(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$,

Y的概率密度为$f_y(y;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$,

令$L=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)\prod_{j=1}^{m}f_Y(y_j;\theta)$

$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y_j}{2\theta}}$,（$x_i>0$，$y_j>0$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$）

则$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left(-\ln\theta-\frac{x_i}{\theta}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\theta-\frac{y_j}{2\theta}\right)$,

求导$\frac{d\ln L}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{x_i}{\theta^2}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{y_j}{2\theta^2}\right)=-\frac{m+n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{y_j}{2\theta^2}=0$,

解得$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$，即$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)$

$D(\hat{\theta})=\frac{1}{(m+n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}DX_i+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}DY_j\right)=\frac{1}{(m+n)^2}\left(n\theta^2+\frac{1}{4}m\cdot4\theta^2\right)=\frac{\theta^2}{m+n}$.